Построение анизотропных космологических решений в скалярно-тензорной гравитации с кинетической связью

Смирнова Екатерина Александровна

Физический факультет
Кафедра физики частиц и космологии

Научный руководитель:
д.ф.-м.н.
Гальцов Дмитрий Владимирович

29 мая 2024 г.

Мотивация

Формализм Палатини

- Решение в виде дифференциальных уравнений 1-го порядка
- Из дифференциальной геометрии не следует, что связность должна выражаться через метрику каким-то конкретным образом
- Решения уравнений в формализме Палатини всегда будут являться решениями метрических уравнений

Метрический формализм

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\Big\{R - \big[\varepsilon g_{\mu\nu} + \kappa_1 g_{\mu\nu}R + \kappa_2 R_{\mu\nu}\big]\phi^{,\mu}\phi^{,\nu} - 2V(\phi)\Big\} \quad (1)$$

Уравнение Клейна-Гордона

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi + \nabla_\mu\Big[\nabla_\nu\phi(\kappa_1 g^{\mu\nu}R + \kappa_2 R^{\mu\nu})\Big] = 0 \quad (2)$$

Выбор $-2\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$ приводит к

$$\Big[g^{\mu\nu} + \kappa G^{\mu\nu}\Big]\nabla_\mu\nabla_\nu\phi = 0. \quad (3)$$

Формализм Палатини

$$S=\int d^4x\sqrt{-g}\Big\{\tilde{R}-\left[\varepsilon g_{\mu\nu}+\kappa\tilde{G}_{\mu\nu}\right]\phi^{,\mu}\phi^{,\nu}-2V(\phi)\Big\}+S_m[g_{\mu\nu},\psi] \qquad (4)$$

$$\nabla_\alpha(\sqrt{-g}Z^{\mu\nu})=0, \qquad (5)$$

$$Z^{\mu\nu}=\lambda g^{\mu\nu}-\kappa_2\phi^\mu\phi^\nu, \qquad (6)$$

где $\lambda=1-\kappa_1 X$, $X=g^{\mu\nu}\phi_\mu\phi_\nu$.

Вторая метрика

Стандартный способ выразить $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ из вариации заключается в преобразовании этого выражения к виду

$$\hat{\nabla}_{\lambda}\hat{g}_{\mu\nu} = 0 \tag{7}$$

$$\sqrt{-g}\,Z^{\mu\nu} = \sqrt{-\hat{g}}\,\hat{g}^{\mu\nu} \tag{8}$$

$$\nabla_{\alpha}(\sqrt{-g}\,Z^{\mu\nu}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\nabla}_{\alpha}\sqrt{-\hat{g}}\,\hat{g}^{\mu\nu} = 0 \tag{9}$$

Дисформные преобразования

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \sqrt{\lambda\mu}(g_{\mu\nu} + \kappa_2\mu^{-1}\phi_\mu\phi_\nu), \tag{10}$$

где $\mu = 1 - (\kappa_1 + \kappa_2)X$.

Получаем, что $\hat{\Gamma}$ представляет собой связность Леви-Чивитты для $\hat{g}_{\mu\nu}$

$$\hat{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\hat{g}^{\alpha\beta}(\partial_\nu\hat{g}_{\beta\mu} + \partial_\mu\hat{g}_{\beta\nu} - \partial_\beta\hat{g}_{\mu\nu}) \tag{11}$$

$$S = \int d^4x\sqrt{-\hat{g}}\hat{g}^{\mu\nu}(R_{\mu\nu} - \mu^{-1}\phi_\mu\phi_\nu) \tag{12}$$

Кинетическая связь Палатини $\kappa_2 = -\kappa_1 = \kappa$

$$S = \int d^4x \sqrt{-\hat{g}}\,\hat{g}^{\mu\nu}(R_{\mu\nu} - \phi_\mu \phi_\nu). \tag{13}$$

$$R_{\mu\nu} = \phi_\mu \phi_\nu \tag{14}$$

$$\hat{g}^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi = 0, \tag{15}$$

$$S = \int d^4x \sqrt{-g}\Big\{R - \big[\varepsilon g_{\mu\nu} + \kappa_1 g_{\mu\nu} R + \kappa_2 R_{\mu\nu}\big]\phi^{,\mu}\phi^{,\nu} - 2V(\phi)\Big\} \tag{16}$$

$$\lambda R_{\mu\nu} - \phi_\mu \phi_\nu (1 + \kappa_2 R) - 2\kappa_2 R_{\alpha(\mu}\phi_{\nu)}\phi^\alpha - g_{\mu\nu} L_2 = 0 \tag{17}$$

$$\partial_\mu \left[\sqrt{-g}\left(\phi^\mu + \kappa_1 R \phi^\mu + \kappa_2 R_{\alpha\beta} g^{\beta\mu} \phi^\alpha\right)\right] = 0 \tag{18}$$

Эйнштейновский фрейм

Метрика в анизотропном однородном пространстве типа Бианки 1 представляется

$$ds^2 = -dt^2 + \hat{a}_1^2(t)dx^2 + \hat{a}_2^2(t)dy^2 + \hat{a}_3^2(t)dy^2. \qquad (19)$$

$$\hat{a} = (\hat{a}_1\hat{a}_2\hat{a}_3)^{\frac{1}{3}} \qquad \hat{H} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\hat{H}_i \qquad (20)$$

$$\frac{d}{dt}(\hat{a}^3\dot{\phi}) = 0 \qquad (21)$$

$$R_{00} = -\sum_{i=1}^{3}\frac{\ddot{\hat{a}}_i}{\hat{a}_i} = -3\dot{\hat{H}} - \sum_{i=1}^{3}\hat{H}_i^3 = \dot{\phi}^2 \qquad (22)$$

$$R_{ij} = \hat{a}_i^2(\dot{\hat{H}}_i + 3\hat{H}_i\hat{H})\delta_{ij} = \frac{\hat{a}_i^2}{\hat{a}^3}\frac{d}{dt}(\hat{a}^3 H_i)\delta_{ij} = 0. \qquad (23)$$

Эйнштейновский фрейм

Казнеровское решение представляет собой

$$\hat{H}_i = \frac{\hat{p}_i}{\hat{a}^3} \tag{24}$$

$$\hat{a} = t^{\frac{1}{3}} \qquad \hat{a}_i = t^{\hat{p}_i} \tag{25}$$

$$\sum_{i=1}^{3} p_i = 1 \qquad \sum_{i=1}^{3} \hat{p}_i{}^2 = 1 - q \tag{26}$$

$$\phi = q\ln t + \phi_0, \tag{27}$$

Жордановский фрейм

$$g_{00} = -N^2 = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - \kappa\dot{\phi}^2 \tag{28}$$

$$g_{ij} = a_i^2\delta_{ij} = \frac{\hat{a}_i^2}{\lambda}\delta_{ij} = \hat{a}_i^2(N^2 - \kappa\dot{\phi}^2)\delta_{ij} = a_i^2 N^2 \lambda\delta_{ij} \tag{29}$$

Согласно дисформным преобразованиям

$$N^2 = \left(N^2 - \frac{2}{3\sqrt{3}}x\right)^3 \tag{30}$$

Решение - гладкое, но вещественная часть представляется как кусочно-заданная функция

$$N^2 = \frac{2}{3\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{cases} 2\cos\frac{1}{3}\arccos x, & 0 \le \mathrm{x} < 1 \\ A^{\frac{1}{3}} + A^{-\frac{1}{3}}, & \mathrm{x} \ge 1, \end{cases} \tag{31}$$

где $A = x + \sqrt{x^2 - 1}$, $x = \frac{3\sqrt{3}}{2}\kappa\dot{\phi}^2 = -\frac{3\sqrt{3}}{2}\kappa\hat{X} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{\kappa q^2}{t^2}$

Основные результаты в теории Бианки I

Рассмотрим поведение (31) вблизи сингулярности $t \to 0$

$$N^2 = \frac{1}{(\gamma t)^2}\left(1+(\gamma t)^{4/3}+\frac{1}{3}(\gamma t)^{8/3}+\frac{1}{81}(\gamma t)^{16/3}+\dots\right), \quad (32)$$

где $\gamma = 1/\sqrt{q^2\kappa}$

$$a_i = \sqrt{\hat{a}_i^2\left(N^2-\frac{1}{(\gamma t)^2}\right)} \simeq (\gamma t)^{-1/3}t^{p_i} \quad (33)$$

$$a = (a_1a_2a_3)^{1/3} \approx \left(-\frac{1}{\gamma^2\kappa^3}\right)^{1/6} = \mathrm{const} \quad (34)$$

$$\beta_i = \hat{\beta}_i \approx \left(p_i - \frac{1}{3}\right)\ln t \quad (35)$$

Основные результаты в теории Бианки I

Если рассмотреть $t \to \infty$, то удобно выразить через $x \to 0$:

$$N^2 \simeq 1 + \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{x^2}{18} + \frac{4x^3}{81\sqrt{3}} + \ldots. \tag{36}$$

$$a_i = \sqrt{\hat{a}_i^2 \left(N^2 - \frac{1}{(\gamma t)^2} \right)} \approx t^{p_i} \approx \hat{a}_i. \tag{37}$$

$$a = \mathrm{const} \tag{38}$$

Основные результаты в теории Бианки I

$$\hat{R} = R_{\mu\nu}\hat{g}^{\mu\nu} = R_{00}\hat{g}^{00} = -\dot{\phi}^2 = -\frac{q^2}{t^2} \tag{39}$$

$$R = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = \hat{R}/N^2 \simeq -\frac{1}{\kappa}. \tag{40}$$

$$\hat{K} = \hat{R}_{\mu\nu\alpha\beta}\hat{R}^{\mu\nu\alpha\beta} = -\frac{16}{t^4}\prod_{i=1}^{3} p_i + 3\frac{q^4}{t^4} \tag{41}$$

$$K = R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta} \approx -\frac{2^{1/3}\gamma^4(2 + 12\prod_{i=1}^{3} p_i - 3q^4)}{(\gamma t)^{-\frac{4}{3}}}. \tag{42}$$

Основные результаты в теории Бианки I

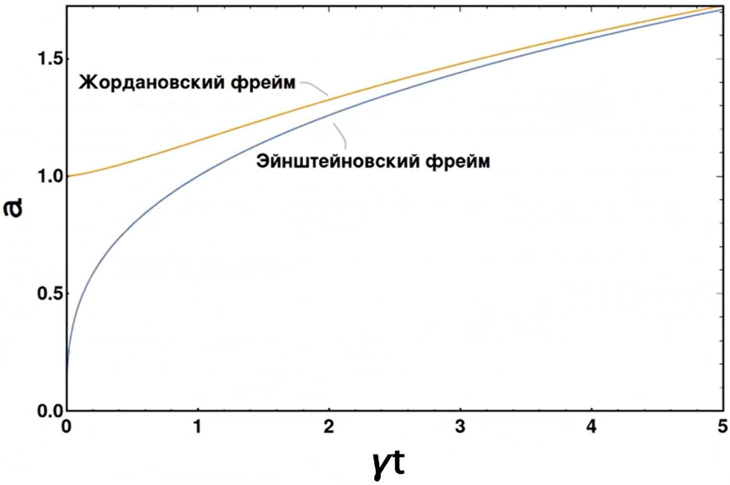

Рис.1: Средние значение масштабного фактора в Эйнштейновском и Жордановском фреймах

Основные результаты в теории Бианки I

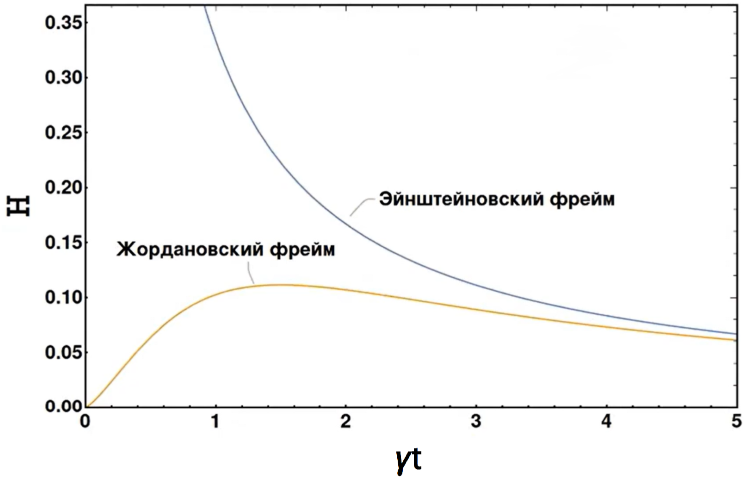

Рис.2: Средние значение постоянной Хаббла в Эйнштейновском и Жордановском фреймах

Выводы

Теория с неминимальной кинетической связью

- имеет сингулярность в модели типа Бианки I
- на поздних этапах эволюция Вселенной приближается к теории с минимальной связью
- остается анизотропной вблизи сингулярности , так как параметры анизотропии β_i остаются инвариантными относительно дисформных преобразований.